

## 1. Einfache unbestimmte Integrale

### 1.1.

**Aufgabe:**

$$\int \frac{x^3 \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx &= \int \frac{x^{\frac{7}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} dx = \int x^{\frac{7}{2} - \frac{2}{3}} dx = \int x^{\frac{17}{6}} dx = \frac{6}{23} x^{\frac{23}{6}} + C \\ &= \frac{6}{23} x^{\frac{18}{6}} \cdot x^{\frac{5}{6}} + C = \underline{\underline{\frac{6}{23} x^3 \cdot \sqrt[6]{x^5} + C}} \end{aligned}$$

### 1.2.

**Aufgabe:**

$$\int 2b(a + bx) dx$$

**Lösung:**

$$\int 2b(a + bx) dx = \int (2ba + 2b^2x) dx = 2bax + 2b^2 \frac{1}{2} x^2 + C = \underline{\underline{2bax + b^2x^2 + C}}$$

### 1.3.

**Aufgabe:**

$$\int \sin \alpha \cdot \cos \varphi d\varphi$$

**Lösung:**

$$\int \sin \alpha \cdot \cos \varphi d\varphi = \sin \alpha \int \cos \varphi d\varphi = \underline{\underline{\sin \alpha \cdot \sin \varphi + C}}$$

### 1.4.

**Aufgabe:**

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$$

**Lösung:**

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{(\sin x \cdot \cos x) \cdot (\sin x \cdot \cos x)} dx = \int \frac{1}{\frac{1}{2} \sin(2x) \cdot \frac{1}{2} \sin(2x)} dx =$$

$$4 \cdot \int \frac{1}{\sin^2(2x)} dx = (\text{Papula Integral 215}) 4 \cdot -\frac{\cos(2x)}{2} = \underline{\underline{2 \cdot \cos(2x)}}$$

## 2. Integration durch Substitution

### 2.1.

**Aufgabe:**

$$\int \frac{1}{\sqrt{mx+n}} dx$$

**Lösung:**

$$\text{Substitution: } z = mx + n \Rightarrow \frac{dz}{dx} = m \Leftrightarrow dx = \frac{1}{m} dz$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{m} dz = \frac{1}{m} \int \frac{1}{\sqrt{z}} dz = \frac{1}{m} \cdot 2\sqrt{z} + C$$

$$\text{Re substitution: } z = mx + n$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{m} \cdot 2\sqrt{mx+n} + C}}$$

### 2.2.

**Aufgabe:**

$$\int \frac{1}{a-bx} dx$$

**Lösung:**

$$\text{Substitution: } z = a - bx \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -b \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{b} dz$$

$$\int \frac{1}{z} \cdot -\frac{1}{b} dz = -\frac{1}{b} \int \frac{1}{z} dz = -\frac{1}{b} \cdot \ln(z) + C$$

$$\text{Rücksubstitution: } z = a - bx$$

$$\underline{\underline{-\frac{1}{b} \cdot \ln(a - bx) + C}}$$

### 2.3.

**Aufgabe:**

$$\int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{a^2 + x^2}} dx$$

**Lösung:**

$$\text{Substitution: } x = a \cdot \sin z \Rightarrow \frac{dx}{dz} = a \cdot \cos z \Leftrightarrow dx = a \cdot \cos z \cdot dz$$

$$\int \frac{a \cdot \cos z}{a^2 \cdot \sin^2 z \cdot \sqrt{a^2 + (a^2 \cdot \sin^2 z)}} dz = \int \frac{\cos z}{a \cdot \sin^2 z \cdot \sqrt{a^2 \cdot (1 - \sin^2 z)}} dz = \int \frac{\cos z}{a^2 \cdot \sin^2 z \cdot \sqrt{1 - \sin^2 z}} dz$$

mit  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \Leftrightarrow \cos^2 z = 1 - \sin^2 z \Leftrightarrow \cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z}$  ergibt sich:

$$\int \frac{\cancel{\cos z}}{a^2 \cdot \sin^2 z \cdot \cancel{\cos z}} dz = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\sin^2 z} dz \quad (\rightarrow \text{Papula Integral 215}) = \underline{\underline{-\frac{1}{a^2} \cot z + C}}$$

mit  $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$  ergibt sich:

$$-\frac{1}{a^2} \cot z + C = -\frac{\cos z}{a^2 \cdot \sin z} + C$$

mit  $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \Leftrightarrow \cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z}$  ergibt sich:

$$-\frac{\sqrt{1 - \sin^2 z}}{a^2 \cdot \sin z} + C$$

Rücksubstitution:  $a \cdot \sin z = x$  bzw.  $\sin z = \frac{x}{a}$

$$-\frac{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}{ax} + C \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{\frac{1}{a^2}(a^2 - x^2)}}{ax} + C = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a^2 x} + C}}$$

### 3. Partielle Integration

#### 3.1

**Aufgabe:**

$$\int \frac{1}{\ln(x) \cdot x} dx$$

**Lösung:**

$$\int \frac{1}{\ln(x) \cdot x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} dx \quad \left( \text{entspreche: } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| \quad (\text{Papula Seite: 150}) \right)$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x}; \quad f(x) = \ln(x)} \Rightarrow \int \frac{1}{\ln(x) \cdot x} dx = \underline{\underline{\ln(\ln(x))}}$$

#### 3.2

**Aufgabe:**

$$\int x^n e^{ax} dx$$

### Lösung:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx \quad (\text{Papula Seite : 152})$$

$$u(x) = x^n \Rightarrow u'(x) = nx^{n-1}$$

$$v'(x) = e^{ax} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$x^n \cdot \frac{1}{a} e^{ax} - \int nx^{n-1} \cdot \frac{1}{a} e^{ax} = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax}$$

### 3.3

#### Aufgabe:

$$\int \cos^m(x) dx$$

#### Lösung:

$$\int \cos^m(x) dx = \int \cos(x) \cdot \cos^{m-1}(x) dx$$

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

$$u(x) = \cos^{m-1}(x) \Rightarrow u'(x) = (m-1) \cdot \cos^{m-2}(x) \cdot -\sin(x) \quad (\text{Verkettete Funktion})$$

$$v'(x) = \cos(x) \Rightarrow v(x) = \sin(x)$$

$$\int \cos^m(x) dx = \cos^{m-1}(x) \cdot \sin(x) - \int (m-1) \cdot \cos^{m-2}(x) \cdot -\sin(x) \cdot \sin(x) dx$$

$$\int \cos^m(x) dx = \cos^{m-1}(x) \cdot \sin(x) + (m-1) \int \sin^2(x) \cdot \cos^{m-2}(x) dx$$

$$\text{mit } \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) \text{ ergibt sich :}$$

$$\int \cos^m(x) dx = \cos^{m-1}(x) \cdot \sin(x) + (m-1) \int (1 - \cos^2(x)) \cdot \cos^{m-2}(x) dx$$

$$\int \cos^m(x) dx = \cos^{m-1}(x) \cdot \sin(x) + (m-1) \int \cos^{m-2}(x) - \cos^m(x) dx$$

$$\int \cos^m(x) dx = \cos^{m-1}(x) \cdot \sin(x) + (m-1) \int \cos^{m-2}(x) dx - (m-1) \int \cos^m(x) dx$$

$$\int \cos^m(x) dx + (m-1) \int \cos^m(x) dx = \cos^{m-1}(x) \cdot \sin(x) + (m-1) \int \cos^{m-2}(x) dx$$

$$(1 + (m-1)) \int \cos^m(x) dx = \cos^{m-1}(x) \cdot \sin(x) + (m-1) \int \cos^{m-2}(x) dx$$

$$\int \cos^m(x) dx = \frac{\cos^{m-1}(x) \cdot \sin(x) + (m-1) \int \cos^{m-2}(x) dx}{m}$$

$$\int \cos^m(x) dx = \frac{1}{m} \cos^{m-1}(x) \cdot \sin(x) + \frac{(m-1)}{m} \int \cos^{m-2}(x) dx$$

### 3.1

#### Aufgabe:

$$\int \sin(ax) \sin(bx) dx$$

### Lösung:

$$\int \sin(ax) \sin(bx) dx$$

$$\int u \cdot dv \cdot dx = u \cdot v - \int du \cdot v \cdot dx$$

$$u = \sin(ax) \Rightarrow du = a \cdot \cos(ax) dx$$

$$dv = \sin(bx) dx \Rightarrow$$

$$\text{Substitution : } z = bx \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = b \Leftrightarrow dx = \frac{1}{b} dz$$

$$\int dv = \frac{1}{b} \int \sin(z) dz = -\frac{1}{b} \cos(z)$$

$$\text{Rücksubstitution : } z = bx$$

$$v = -\frac{1}{b} \cos(bx)$$

$$\int \sin(ax) \sin(bx) dx = \sin(ax) \cdot -\frac{1}{b} \cos(bx) - \int a \cdot \cos(ax) \cdot -\frac{1}{b} \cos(bx) dx$$

$$\int \sin(ax) \sin(bx) dx = -\frac{1}{b} \sin(ax) \cdot \cos(bx) + \frac{a}{b} \int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx$$

$$\int \sin(ax) \sin(bx) dx = -\frac{1}{b} \sin(ax) \cdot \cos(bx) + \frac{a}{b} \int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx$$

$$\int u \cdot dv \cdot dx = u \cdot v - \int du \cdot v \cdot dx$$

$$u = \cos(ax) \Rightarrow du = -a \cdot \sin(ax) dx$$

$$dv = \cos(bx) dx \Rightarrow v = \frac{1}{b} \sin(bx) \text{ (siehe oben)}$$

$$\int \sin(ax) \sin(bx) dx = -\frac{1}{b} \sin(ax) \cdot \cos(bx) + \frac{a}{b} \left( \cos(ax) \cdot \frac{1}{b} \sin(bx) - \int -a \cdot \sin(ax) \cdot -\frac{1}{b} \sin(bx) dx \right)$$

$$\int \sin(ax) \sin(bx) dx = -\frac{1}{b} \sin(ax) \cdot \cos(bx) + \frac{a}{b} \left( \cos(ax) \cdot \frac{1}{b} \sin(bx) - \frac{a}{b} \int \sin(ax) \cdot \sin(bx) dx \right)$$

$$\int \sin(ax) \sin(bx) dx = -\frac{1}{b} \sin(ax) \cdot \cos(bx) + \cos(ax) \cdot \frac{a}{b^2} \sin(bx) - \frac{a^2}{b^2} \int \sin(ax) \cdot \sin(bx) dx$$

$$\int \sin(ax) \sin(bx) dx + \frac{a^2}{b^2} \int \sin(ax) \cdot \sin(bx) dx = -\frac{1}{b} \sin(ax) \cdot \cos(bx) + \cos(ax) \cdot \frac{a}{b^2} \sin(bx)$$

$$\left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \int \sin(ax) \cdot \sin(bx) dx = -\frac{1}{b} \sin(ax) \cdot \cos(bx) + \cos(ax) \cdot \frac{a}{b^2} \sin(bx)$$

$$\int \sin(ax) \cdot \sin(bx) dx = \frac{-\frac{1}{b} \sin(ax) \cdot \cos(bx) + \cos(ax) \cdot \frac{a}{b^2} \sin(bx)}{\left(\frac{b^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}\right)}$$

$$\int \sin(ax) \cdot \sin(bx) dx = \frac{-\frac{1}{b} \sin(ax) \cdot \cos(bx) + \cos(ax) \cdot \frac{a}{b^2} \sin(bx)}{\left(\frac{a^2 + b^2}{b^2}\right)}$$

$$\int \sin(ax) \cdot \sin(bx) dx = -\frac{b \cdot \sin(ax) \cdot \cos(bx) - \cos(ax) \cdot a \cdot \sin(bx)}{a^2 + b^2} + C$$


---



---

## 4. Integration durch Partialbruchzerlegung

### 4.1

**Aufgabe:**

$$\int \frac{5x+1}{x^2+x-2} dx$$

**Lösung:**

$$\int \frac{5x+1}{x^2+x-2} dx = \int \frac{5x+1}{(x-1)(x+2)} dx = \int \frac{A(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{B(x-1)}{(x+2)(x-1)} dx$$

$$5x+1 = A(x+2) + B(x-1)$$

$$\text{für } x = -2 \text{ ergibt sich: } 5x+1 = B(-2-1) \Leftrightarrow -9 = -3B \Leftrightarrow B = 3$$

$$\text{für } x = 1 \text{ ergibt sich: } 5x+1 = A(1+2) \Leftrightarrow 6 = 3A \Leftrightarrow A = 2$$

$$\int \frac{2(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{3(x-1)}{(x+2)(x-1)} dx = 2 \int \frac{1}{(x-1)} dx + 3 \int \frac{1}{(x+2)} dx = \underline{\underline{2 \ln(x-1) + 3 \ln(x+2) + C}}$$

### 4.2

**Aufgabe:**

$$\int \frac{(3x^3 + 5x^2 - 29x - 25)}{x^2 + x - 12} dx$$

## Lösung:

$$(3x^3 + 5x^2 - 29x - 25) : (x^2 + x - 12) = 3x + 2 + \frac{5x - 1}{x^2 + x - 12}$$
$$\frac{-(3x^3 + 3x^2 - 36x)}{2x^2 + 7x - 25}$$
$$\frac{-(2x^2 + 2x - 24)}{5x - 1}$$

$$3x + 2 + \frac{5x - 1}{x^2 + x - 12} = 3x + 2 + \frac{5x - 1}{(x + 4)(x - 3)} = 3x + 2 + \frac{A(x - 3)}{(x + 4)(x - 3)} + \frac{B(x + 4)}{(x + 4)(x - 3)}$$

$$5x - 1 = A(x - 3) + B(x + 4)$$

$$\text{für } x = -4 \text{ ergibt sich: } -21 = -7A \Leftrightarrow A = 3$$

$$\text{für } x = 3 \text{ ergibt sich: } 14 = 7B \Leftrightarrow B = 2$$

$$3x + 2 + \frac{3(x-3)}{(x+4)(x-3)} + \frac{2(x+4)}{(x+4)(x-3)} = 3x + 2 + \frac{3}{x+4} + \frac{2}{x-3} =$$

$$3 \int x \, dx + \int 2 \, dx + 3 \int \frac{1}{x+4} \, dx + 2 \int \frac{1}{x-3} \, dx = \underline{\underline{\frac{3}{2}x^2 + 2x + 3 \ln(x+4) + 2 \ln(x-3) + C}}$$

## 5 Bestimme Integrale

### 5.1

#### Aufgabe:

$$\int_0^3 (2x + 3x^3) \, dx$$

#### Lösung:

$$\int_0^3 (2x + 3x^3) \, dx = \int_0^3 2x \, dx + \int_0^3 3x^3 \, dx = \left[ \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} x^2 \right]_0^3 + \left[ \cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} x^3 \right]_0^3 = 3^2 - 0 + 3^3 - 0 = 9 + 27 = \underline{\underline{36}}$$

### 5.2

#### Aufgabe:

$$\int_0^{\sqrt{1.5}} \frac{1}{2x^2 + 9} \, dx$$

### Lösung:

$$\int_0^{\sqrt{1,5}} \frac{1}{2x^2 + 9} dx = \int_0^{\sqrt{1,5}} \frac{1}{9 \left( \frac{2}{9} x^2 + 1 \right)} dx = \frac{1}{9} \int_0^{\sqrt{1,5}} \frac{1}{\left( \left( \frac{\sqrt{2}}{3} x \right)^2 + 1 \right)} dx$$

$$\text{Substitution: } \frac{\sqrt{2}}{3} x = z \Rightarrow dz = \frac{\sqrt{2}}{3} dx \Leftrightarrow dx = \frac{3}{\sqrt{2}} dz$$

$$\frac{1}{9} \int_0^{\sqrt{1,5}} \frac{1}{z^2 + 1} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} dz = \frac{1}{3\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{1,5}} \frac{1}{z^2 + 1} dz = (\text{Papula Seite : 148}) = \frac{1}{3\sqrt{2}} [\arctan z]_0^{\sqrt{1,5}}$$

$$\text{Rücksubstitution: } z = \frac{\sqrt{2}}{3} x$$

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \left[ \arctan \left( \frac{\sqrt{2}}{3} x \right) \right]_0^{\sqrt{1,5}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \left( \arctan \left( \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{1,5} \right) - \arctan(0) \right) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$
$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{6} \approx 0,1234$$

### 5.3

#### Aufgabe:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cdot \sin(x - \varphi) dx$$

#### Lösung:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cdot \sin(x - \varphi) dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cdot (\sin(x) \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \cdot \cos(x)) dx =$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x) \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) dx = \cos(\varphi) \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx - \sin(\varphi) \int_0^{2\pi} \sin(x) \cdot \cos(x) dx$$

Integral in Teilintegrale zerlegen:

Erster Teil:

$$\cos(\varphi) \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \cos(\varphi) \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) dx = \cos(\varphi) \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2x)) dx =$$

$$\cos(\varphi) \frac{1}{2} [x - \sin(2x)]_0^{2\pi} = \cos(\varphi) \frac{1}{2} (2\pi - \sin(2 \cdot 2\pi)) = \underline{\underline{\cos(\varphi) \cdot \pi}}$$

Zweiter Teil:

$$\sin(\varphi) \int_0^{2\pi} \sin(x) \cdot \cos(x) dx$$

*Substitution*:  $\sin(x) = z \Rightarrow dz = \cos(x) dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{\cos(x)} dz$

$$\sin(\varphi) \int_0^{2\pi} \cancel{\cos(x)} \cdot z \cdot \frac{1}{\cancel{\cos(x)}} dz = \sin(\varphi) \int_0^{2\pi} z dz = \sin(\varphi) \cdot \left[ \frac{1}{2} z^2 \right]_0^{2\pi}$$

*Rücksubstitution*:  $z = \sin(x)$

$$\sin(\varphi) \frac{1}{2} \cdot \left[ \sin^2(x) \right]_0^{2\pi} = \sin(\varphi) \frac{1}{2} \cdot \left[ \underbrace{\sin^2(2\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin^2(0)}_{=0} \right] = \underline{0}$$

Integrale wieder zusammensetzen:

$$\cos(\varphi) \cdot \pi - 0 = \underline{\underline{\cos(\varphi) \cdot \pi}}$$

## 6. Flächeninhalte dieser Figuren

### 6.1

#### Aufgabe:

Die Fläche einer gleichseitigen Hyperbel  $xy = 1$  in den Grenzen zwischen  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 3$  ist zu bestimmen!

#### Lösung:

$$xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$$

*Integration*:

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx = \left[ \ln(x) \right]_1^3 = \ln(3) - \cancel{\ln(1)} = \ln(3) \approx \underline{\underline{1,0986}}$$

### 6.2

#### Aufgabe:

Berechnen Sie das Flächenstück zwischen der Sinus - Funktion und der Cosinus - Funktion in den Grenzen von  $\frac{1}{4}\pi$  bis  $\frac{5}{4}\pi$ .

## Lösung:

Eine Möglichkeit :

$$\begin{aligned} 2 \left( \int_0^{\pi} \sin(x) dx - 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) \right) &= 2 \left( [-\cos(x)]_0^{\pi} - 2[-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} \right) = \\ 2 \left( (-\cos(\pi) - -\cos(0)) - 2 \left( -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - -\cos(0) \right) \right) &= \\ 2 \left( (1+1) - 2 \left( -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1 \right) \right) &= 4 - 4 \left( -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1 \right) \approx 2,828 \end{aligned}$$

## 7. Rotationsfläche

### 7.1

#### Aufgabe:

Wie groß ist die Mantelfläche, die durch Rotation der Parabel  $y^2 = 4x$  um die  $x$ -Achse in den Grenzen  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 4$  entsteht?

#### Lösung:

$$M = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+(y')^2} \quad (\text{Papula Seite : 170})$$

$$\boxed{a = x_1 = 0} \quad \boxed{b = x_2 = 4} \quad \boxed{y = 2\sqrt{x}} \quad \boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$M = 4\pi \int_0^4 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx = 4\pi \int_0^4 \sqrt{x+1} \cdot dx$$

Substitution :  $x+1 = z \Rightarrow dz = dx$

$$M = 4\pi \int_0^4 \sqrt{z} \cdot dz = 4\pi \left[ \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right]_0^4$$

Rücksubstitution :  $z = x+1$

$$M = \frac{8}{3} \pi \left[ (x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{8}{3} \pi \left( 5^{\frac{3}{2}} + 1 \right) = \underline{\underline{\frac{8}{3} \pi \cdot 10,18}}$$

### 7.2

#### Aufgabe:

Es ist die Oberfläche der Halbkugel zu berechnen.

## Lösung:

Formel für die Berechnung von Mantelflächen:

$$M_x = 2\pi \cdot \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (\text{Papula Seite : 170})$$

Mittelpunktsgleichung eines Kreises:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (\text{Papula Seite : 115}) \Leftrightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot -\cancel{x} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$y$  und  $y'$  in  $M_x$  einsetzen:

$$M_x = 2\pi \cdot \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left( -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right)^2} dx \Leftrightarrow M_x = 2\pi \cdot \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx$$

$$M_x = 2\pi \cdot \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2 + \frac{x^2 \cdot (r^2 - x^2)}{r^2 - x^2}} dx \Leftrightarrow M_x = 2\pi \cdot \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2 + \frac{x^2 \cdot (r^2 - x^2)}{r^2 - x^2}} dx$$

$$M_x = 2\pi \cdot \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2 + x^2} dx \Leftrightarrow M_x = 2\pi \cdot \int_{-r}^r r \cdot dx = 2\pi [rx]_{-r}^r = 2\pi(r^2 + r^2) = 4\pi r^2$$

Oberfläche der Halbkugel:

$$M_{\text{Halbkugel}} = \frac{M_x}{2} \Rightarrow M_{\text{Halbkugel}} = \underline{\underline{2\pi r^2}}$$

## 8 Differentialgleichungen

### 8.1

#### Aufgabe

Zwei Arten stehen in einem "Räuber - Beute"-Verhältnis. Die "Beute" nimmt in Abwesenheit der "Räuber" exponentiell mit der Geburtenrate  $\alpha > 0$  zu. "Räuber" jagen ausschließlich die Art "Beute". Die "Räuberpopulation" nimmt bei Abwesenheit der Art "Beute" exponentiell mit der Sterberate  $\beta > 0$  ab. D.h. es gilt  $R' = -\beta R$ .

Diskutieren Sie die Konsequenzen bei einer Koexistenz beider Arten in einem gemeinsamen abgeschlossenen Lebensraum.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Wachstumsrate  $\alpha = \frac{B'}{B}$  der Beute für  $R > 1$  um einen zu  $\ln(R)$  proportionalen Term  $\varphi \cdot \ln(R)$ , ( $\varphi > 0$ ) verkleinert wird.

Stellen Sie die Differentialgleichung auf und lösen Sie die Gleichung.

**Teillösung: ?!?!?!?**

$$\frac{1}{B} \cdot \frac{d}{dt} \cdot B = \alpha - \varphi \ln(R) \quad b = \ln(B)$$

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{d}{dt} \cdot R = -\beta + \delta \ln(B) \quad r = \ln(R)$$

$$b' = \alpha - \varphi r$$

$$r' = -\beta + \delta b$$

Die Lösung führt auf die Gleichung eines homogenen Oszillators;  $r = \ln(R)$

schwingt um einen Gleichgewichtswert  $r^* = \frac{\alpha}{\varphi}$ .

## 8.2

Viel zu krass ...

## 8.3

**Aufgabe:**

$$(4+x)y' + y = 6 + 2x$$

**Lösung:**

$$(4+x)y' + y = 6 + 2x \Leftrightarrow y' + \underbrace{\frac{1}{(4+x)}}_{f(x)} y = \underbrace{\frac{6+2x}{(4+x)}}_{g(x)}$$

$$y = e^{-\int f(x) dx} \left( \int g(x) \cdot e^{\int f(x) dx} \right) = e^{-\int \frac{1}{(4+x)} dx} \left( \int \frac{6+2x}{(4+x)} \cdot e^{\int \frac{1}{(4+x)} dx} dx \right) \quad \dots$$

$$y = e^{-\ln(4+x)} \left( \int \frac{6+2x}{(4+x)} \cdot \cancel{(4+x)} dx \right) = e^{(\ln(4+x))^{-1}} \int 6+2x dx = \frac{1}{4+x} (6x + x^2 + C)$$

## 8.4

**Aufgabe:**

$$y'' = 4x^2 + 5x$$

**Lösung:**

$$\int y'' dy = \int (4x^2 + 5x) dx$$

$$y' = \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C_1$$

$$\int y' \cdot dy = \int \left( \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C_1 \right) \cdot dx$$

$$y = \frac{4}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + C_1x + C_2$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{3}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + C_1x + C_2}}$$

**8.5****Aufgabe:**

$$2y'' - 8y' + 6y = 0$$

**Lösung:**

Charakteristische Gleichung :

$$2k^2 - 8k + 6 = 0$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

$$k_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-3}$$

$$k_1 = 1, k_2 = 3$$

$k_1$  und  $k_2$  einsetzen in  $y(x) = C_1 e^{k_1 \cdot x} + C_2 e^{k_2 \cdot x}$  :

$$\underline{\underline{y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}}}$$

**8.6****Aufgabe:**

$$3y'' + 18y' + 27y = 0$$

**Lösung:**

Charakteristische Gleichung :

$$3k^2 + 18k + 27 = 0$$

$$k^2 + 6k + 9 = 0$$

$$k_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9-9}$$

$$k_1 = -3$$

$k_1$  einsetzen in  $y(x) = (c_1 x + c_2) e^{k_1 x}$  :

$$y(x) = (c_1 x + c_2) e^{-3x}$$

## 8.7

### Aufgabe:

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

### Lösung:

Charakteristische Gleichung :

$$k^2 + 2k + 5 = 0$$

$$k_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2\sqrt{-1}$$

$$k_1 = -1 + 2i, k_2 = -1 - 2i$$

$$\rho = -1, \omega = 2$$

$\rho$  und  $\omega$  einsetzen in  $y(x) = e^{-\rho x} (A \cdot \cos(\omega x) + B \cdot \sin(\omega x))$ :

$$\underline{\underline{y(x) = e^{-x} (A \cdot \cos(2x) + B \cdot \sin(2x))}}$$