Aufgaben zur Partialbruchzerlegung

Aufgabe 1

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx$$

Lösung

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \int \frac{1}{(x+a)(x-a)}\,dx$$

$$Partialbruchzerlegung: \frac{1}{(x+a)(x-a)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x+a)}$$

$$Gleichnamig\ machen: \frac{A(x+a)}{(x+a)(x-a)} + \frac{B(x-a)}{(x+a)(x-a)}$$

$$Zählervergleich: A(x+a)+B(x-a)=1$$

$mit\ x=a:$

$$A(a+a)+B(a-a)=1 \Leftrightarrow A=\frac{1}{2a}$$

$mit\ x=-a:$

$$A(-a+a)+B(-a-a)=1 \Leftrightarrow B=-\frac{1}{2a}$$

$$A\,und\,B\,einsetzen\,in: \frac{A}{(x-a)}+\frac{B}{(x+a)} \quad ergibt: \frac{1}{2a(x-a)}-\frac{1}{2a(x+a)}$$

$Daraus\ folgt:$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \int \frac{1}{2a(x-a)}\,dx - \int \frac{1}{2a(x+a)}\,dx = \underline{\underline{2a\cdot ln|x-a| - 2a\cdot ln|x+a| + C}}$$

Aufgabe 2

$$\int \frac{4x^3}{x^3+2x^2-x-2}\,dx$$

Lösung

$$Polinomdivision: \left(4x^3\right):\left(x^3+2x^2-x-2\right) = 4+\frac{-8x^2+4x+8}{x^3+2x^2-x-2}$$

$$\begin{array}{l} -\left(4x^3+8x^2-4x-8\right) \\ \hline \qquad -8x^2+4x+8 \end{array}$$

$$Daraus\ folgt: \int \frac{4x^3}{x^3+2x^2-x-2}\,dx = \int 4dx + \int \frac{-8x^2+4x+8}{x^3+2x^2-x-2}\,dx$$

$$Nenner-Nullstellen: x^3+2x^2-x-2=0 \ \left(durch\,raten: x_0=1\right)$$

$$Polinomdivision\ durch\ Nullstelle: \left(x^3+2x^2-x-2\right):\left(x-1\right)=x^2+3x+2$$

$$\begin{array}{l} \underline{-\left(x^3-x^2\right)} \\ \quad 3x^2-x-2 \\ \quad \underline{-\left(3x^2-3x\right)} \\ \qquad 2x-2 \\ \qquad \underline{-\left(2x-2\right)} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

$$Nullstellen\ von\ x^2+3x+2:\ x_{1/2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}}\Rightarrow x_1=-1;x_2=-2$$

$$Nenner-Nullstellen: x_0=1;x_1=-1;x_2=-2$$

$$Daraus\ folgt: \frac{-8x^2+4x+8}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{-8x^2+4x+8}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x+2\right)}$$

$$Partialbruchzerlegung: \frac{-8x^2+4x+8}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x+2\right)}=\frac{A}{\left(x-1\right)}+\frac{B}{\left(x+1\right)}+\frac{C}{\left(x+2\right)}$$

$$Gleichnamig\ machen: \frac{A\left(x+1\right)\left(x+2\right)}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x+2\right)}+\frac{B\left(x-1\right)\left(x+2\right)}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x+2\right)}+\frac{C\left(x+1\right)\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x+2\right)}$$

$$Zählervergleich: A\left(x+1\right)\left(x+2\right)+B\left(x-1\right)\left(x+2\right)+C\left(x+1\right)\left(x-1\right)=-8x^2+4x+8$$

$$mit\ x=1: A\left(1+1\right)\left(1+2\right)=-8+4+8\Leftrightarrow A=\frac{2}{3}$$

$$mit\ x=-1: B\left(-1-1\right)\left(-1+2\right)=-8-4+8\Leftrightarrow B=2$$

$$mit\ x=-2: C\left(-2+1\right)\left(-2-1\right)=-32-8+8=C=-\frac{32}{3}$$

$$A,\ B\ und\ C\ einsetzen\ in: \frac{A}{\left(x-1\right)}+\frac{B}{\left(x+1\right)}+\frac{C}{\left(x+2\right)}\quad ergibt: \frac{2}{3\left(x-1\right)}+\frac{2}{\left(x+1\right)}-\frac{32}{3\left(x+2\right)}$$

$$Daraus\ folgt: \int\frac{4x^3}{x^3+2x^2-x-2}dx=\int 4dx+\int\frac{2}{3\left(x-1\right)}dx+\int\frac{2}{\left(x+1\right)}dx-\int\frac{32}{3\left(x+2\right)}dx$$

$$Integration:$$

$$\int 4dx+\int\frac{2}{3\left(x-1\right)}dx+\int\frac{2}{\left(x+1\right)}dx-\int\frac{32}{3\left(x+2\right)}dx=\underline{\underline{\frac{2}{3}ln\left|x-1\right|+2ln\left|x+1\right|-\frac{32}{3}ln\left|x+2\right|+4x+C}}$$

Aufgabe 3

$$\int \frac{3z}{z^3+3z^2-4}dz$$

Lösung

$$Nenner-Nullstelle\ duch\ raten: z_0=1$$

$$Polinomdivision\ duch\ Nullstelle: z^3+3z^2-4:(z-1)=z^2+4z+4$$

$$\begin{array}{r} \underline{-(z^3-z^2)} \\ 4z^2-4 \\ \underline{-(4z^2-4)} \\ 0 \end{array}$$

$$Nullstellen\ von\ z^2+4z+4: z_{1/2}=-2\pm\sqrt{4-4} \Rightarrow z_1=-2;\ z_2=-2$$

$$Partialbruchzerlegung: \frac{3z}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

$$Gleichnamig\ machen: \frac{A(z+2)^2}{(z-1)(z+2)^2}+\frac{B(x-1)(z+2)}{(z-1)(z+2)^2}+\frac{C(z-1)}{(z-1)(z+2)^2}$$

$$Zählervergleich: A(z+2)^2+B(x-1)(z+2)+C(z-1)=3z$$

$$mit\ z=-2: C(-2-1)=3\cdot-2 \Leftrightarrow C=2$$

$$mit\ z=1: A(1+2)^2=3\cdot1 \Leftrightarrow A=\frac{1}{3}$$

$$mit\ z=0,\ A=\frac{1}{3}\ und\ C=2: \frac{1}{3}2^2+B(-1)(2)+2(-1)=0 \Leftrightarrow B=-\frac{1}{3}$$

$$A,\ B\ und\ C\ einsetzen\ in: \frac{A}{(z-1)}+\frac{B}{(z+2)}+\frac{C}{(z+2)^2} \quad ergibt: \frac{1}{3(z-1)}-\frac{1}{3(z+2)}+\frac{2}{(z+2)^2}$$

$$Daraus\ folgt: \int\frac{3z}{z^3+3z^2-4}dz=\int\frac{1}{3(z-1)}dz-\int\frac{1}{3(z+2)}dz+\int\underbrace{\frac{2}{(z+2)^2}}_{mit\ Substitution}dz$$

$$Integration: \frac{1}{3}ln|z-1|-\frac{1}{3}ln|z+2|-\frac{1}{z+2}+C=\underline{\underline{\frac{1}{3}ln\left|\frac{z-1}{z+2}\right|-\frac{1}{z+2}+C}}$$

Aufgabe 6

$$\int \frac{4x-2}{x^2-2x-63}dx$$

Lösung

$$Nullstellen\ von\ x^2-2x-63: x_{1/2}=1\pm\sqrt{1+63} \Rightarrow x_1=9;\ x_2=-7$$

$$Partialbruchzerlegung: \frac{4x-2}{(x-9)(x+7)}=\frac{A}{(x-9)}+\frac{B}{(x+7)}$$

$$Gleichnamig\ machen: \frac{A(x+7)}{(x-9)}+\frac{B(x-9)}{(x+7)}$$

$$Zählervergleich: A(x+7)+B(x-9)=4x-2$$

$$mit\ x=-7: B(-7-9)=4\cdot-7-2 \Leftrightarrow B\frac{15}{8}$$
$$mit\ x=9:\ A(9+7)=4\cdot9-2 \Leftrightarrow A=\frac{17}{8}$$

$$A\ und\ B\ einsetzen\ in: \frac{A}{(x-9)}+\frac{B}{(x+7)}\quad ergibt: \frac{17}{8(x-9)}+\frac{15}{8(x+7)}$$

$$Daraus\ folgt: \int\frac{4x-2}{x^2-2x-63}dx=\int\frac{17}{8(x-9)}dx+\int\frac{15}{8(x+7)}dx$$

$$Integration: \underline{\underline{\frac{17}{8}ln|x-9|+\frac{15}{8}ln|x+7|+C}}$$

Aufgabe 5

$$\int \frac{2x+1}{x^3-6x^2+9x}dx$$

Lösung

$$Nenner-Nullstelle\ duch\ raten: z_0=3$$
$$Polinomdivision\ duch\ Nullstelle: x^3-6x^2+9x:(x-3)=x^2-3x$$

$$\begin{array}{r} \underline{-(x^3-3x^2)} \\ -3x^2+9x \\ \underline{-(-3x^2+9x)} \\ 0 \end{array}$$

$$Nullstellen\ von\ x^2-3x: x_{1/2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}\Leftrightarrow x_1=3;\ x_2=0$$

$$Partialbruchzerlegung: \frac{2x+1}{(x-3)^2(x-0)}=\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{x}$$

$$Gleichnahmig\ machen: \frac{A(x-3)\cdot x}{(x-3)^2\cdot x}+\frac{B\cdot x}{(x-3)^2\cdot x}+\frac{C(x-3)^2}{(x-3)^2\cdot x}$$

$$Z\ddot{a}hlervergleich: A(x-3)\cdot x+B\cdot x+C(x-3)^2=2x+1$$

$$mit\ x=0: 9C=1\Leftrightarrow C=\frac{1}{9}$$

$$mit\ x=3: 3B=6+1\Leftrightarrow B=\frac{7}{3}$$

$$mit\ x=1,\ C=\frac{1}{9} und\ B=\frac{7}{3}:\ -2A+\frac{7}{3}+\frac{1}{9}\cdot 4=2+1\Leftrightarrow A=-\frac{1}{9}$$

$$A,\ B\ und\ C\ einsetzen\ in: \frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{x}\quad ergibt: -\frac{1}{9(x-3)}+\frac{7}{3(x-3)^2}+\frac{1}{9x}$$

$$Daraus\ folgt: \int\frac{2x-1}{x^3-6x^2+9x}dx=-\int\frac{1}{9(x-3)}dx+\int\frac{7}{3(x-3)^2}dx+\int\frac{1}{9x}dx$$

$$Integration: -\frac{1}{9}ln|x-3|-\frac{7}{3x-9}+\frac{1}{9}ln|x|+C=\underline{\underline{\frac{1}{9}ln\left|\frac{x}{x-3}\right|-\frac{7}{3x-9}+C}}$$