Gemischte Übungsaufgaben zur Integralrechung

Aufgabe 1:

$$\int 3x^2 dx$$

Lösung:

$$\int 3x^2 dx = 3\int x^2 dx = 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 + C = \underline{\underline{x^3 + C}}$$

Aufgabe 2:

$$\int \frac{e^x}{e} dx$$

Lösung:

$$\int \frac{e^x}{e} dx = \frac{1}{e}\int e^x dx = \frac{1}{e} \cdot e^x + C = \underline{\underline{\frac{e^x}{e} + C}}$$

Aufgabe 3:

$$\int (1 - x)^2 dx$$

Lösung:

$$\int (1 - x)^2 dx = \int \left(1 - 2x + x^2\right) dx = \int 1\, dx - 2\int x\, dx + \int x^2 dx = \underline{\underline{x - x^2 + \frac{x^3}{3} + C}}$$

Aufgabe 4:

$$\int (3x + 5)^{17} dx$$

Lösung:

$$Substitution: z = 3x + 5 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 3 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{3} dz$$

$$\frac{1}{3}\int z^{17} dz = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{18} \cdot z^{18} + C = \frac{1}{54} \cdot z^{18} + C$$

$$Rücksubstitution: z = 3x + 5$$

$$\underline{\underline{\frac{(3x + 5)^{18}}{54} + C}}$$

Aufgabe 5:

$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx$$

Lösung:

$$Substitution: z=\sin(x) \Rightarrow \frac{dz}{dx}=\cos(x) \Leftrightarrow dx=\frac{1}{\cos(x)}dz$$

$$\int \frac{\cancel{cox(x)}}{\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos(x)}} dz = \int \frac{1}{\sqrt{z}} dz = \int z^{-\frac{1}{2}} dz = 2z^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{z} + C$$

$$Rücksubstitution: z=\sin(x)$$

$$\underline{\underline{2\sqrt{\sin(x)}+C}}$$

Aufgabe 6:

$$\int e^{ax}dx \; (Mit\ Substitution\ lösen)$$

Lösung:

$$Substiution: z=ax \Rightarrow \frac{dz}{dx}=a \Leftrightarrow dx=\frac{1}{a}dz$$

$$\frac{1}{a}\int e^{z}dz=\frac{1}{a}\cdot e^{z}+C$$

$$Rücksubstitution: z=ax$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{a}\cdot e^{ax}+C}}$$

Aufgabe 7:

$$\int \cos(x)\cdot x\, dx$$

Lösung:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\, dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\, dx$$

$$u(x)=x \Rightarrow u'(x)=1$$

$$v'(x)=\cos(x) \Rightarrow v(x)=\sin(x)$$

$$\int \cos(x)\cdot x\, dx = x\cdot\sin(x) - \int 1\cdot\sin(x)\, dx = \underline{\underline{x\cdot\sin(x)+\cos(x)}}$$

Aufgabe 8:

$$\int \ln(x)\, dx \; (Mit\ \ partieller\ Integartion)$$

Lösung:

$$\int \ln(x)\, dx = \int 1\cdot\ln(x)\, dx$$

$$\int u(x)\cdot v'(x) = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\, dx$$

$$u(x)=\ln(x) \Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}$$

$$v'(x)=1 \Rightarrow v(x)=x$$

$$\int 1\cdot\ln(x)\, dx = \ln(x)\cdot x - \int \frac{1}{\cancel{x}}\cdot \cancel{x}\, dx = \underline{\underline{\ln(x)\cdot x - x + C}}$$

Aufgabe 9:

$$\int x^2 \cdot \left(2x^3 - 5\right)^2 dx$$

Lösung:

$$\int x^2 \cdot \left(2x^3 - 5\right)^2 dx = \int \left(2x^4 - 5x\right)^2 dx = \int 4x^8 - 20x^5 + 25x^2 dx = 4\int x^8 dx - 20\int x^5 dx + 25\int x^2 dx =$$

$$4 \cdot \frac{1}{9}x^9 - 20\frac{1}{6}x^6 + 25 \cdot \frac{1}{3}x^3 + C = \frac{25}{3}x^3 - \frac{20}{6}x^6 + \frac{4}{9}x^9 + C = \underline{\underline{\frac{1}{3}x^3\left(25 - 10x^3 + \frac{4}{3}x^6\right) + C}}$$

Aufgabe 10:

$$\int \frac{5}{3-2x} dx$$

Lösung

$$\int \frac{5}{3-2x} dx = 5\int \frac{1}{3-2x} dx$$

$$Substitution: z = 3 - 2x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -2 \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{2}dz$$

$$-\frac{5}{2}\int \frac{1}{z} dz = -\frac{5}{2}\ln(z) + C$$

$$Rücksubustitution: z = 3 - 2x$$

$$\underline{\underline{-\frac{5}{2}\ln(3 - 2x) + C}}$$

Aufgabe 11:

$$\int \frac{x^2}{\left(3x^3 - 7\right)^5} dx$$

Lösung:

$$Substitution: 3x^3 - 7 = z \Rightarrow dz = 9x^2 \cdot dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{9x^2}dz$$

$$\int \frac{\cancel{x^2}}{z^5} \cdot \frac{1}{9\cancel{x^2}} dz = \frac{1}{9}\int z^{-5} dz = -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4}\frac{1}{z^4} = -\frac{1}{36z^4}$$

$$Rücksubstitution: z = 3x^3 - 7$$

$$\underline{\underline{-\frac{1}{36\left(3x^3 - 7\right)^4} + C}}$$

Aufgabe 12:

$$\int \sin^2(x) \cdot \cos(x) dx$$

Lösung:

$$\int \sin^2(x) \cdot \cos(x)\, dx$$

$$Substitiution: z = \sin(x) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \cos(x) \Leftrightarrow dx = \frac{1}{\cos(x)} dz$$

$$\int z^2 \cdot \cancel{\cos(x)} \frac{1}{\cancel{\cos(x)}} dz = \int z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 + C$$

$$Rücksubstitution: z = \sin(x)$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{3}\sin^3(x) + C}}$$

Aufgabe 13:

$$\int xe^{2x} dx$$

Lösung:

$$\int xe^{2x} dx$$

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

$$u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^{2x} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\int xe^{2x} dx = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int 1 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2}\left(xe^{2x} - \int e^{2x} dx \right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(xe^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x} \right) + C}}$$

Aufgabe 14:

$$\int x^2 e^{-x} dx \left(zweimal\ partiell\ Integrieren \right)$$

Lösung:

$$\int x^2 e^{-x} dx$$

$$\int u(x) \cdot v'(x) = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

$$u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$$

$$\int x^2 e^{-x} dx = x^2 \cdot -e^{-x} - \int 2x \cdot -e^{-x} = -x^2 e^{-x} + \int 2xe^{-x} dx$$

$$\int u(x) \cdot v'(x) = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

$$u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = 2$$

$$v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$$

$$-x^2 e^{-x} + \int 2xe^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2x \cdot -e^{-x} - \int 2 \cdot -e^{-x} dx = \underline{\underline{-x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C}}$$

Aufgabe 15:

$$\int x^2 \cdot \ln(x)\,dx$$

Lösung:

$$\int x^2 \cdot \ln(x)\,dx$$

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

$$u(x) = \ln(x) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = x^2 \Rightarrow v(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$$\int x^2 \cdot \ln(x)\,dx = \frac{1}{3}\left(\ln(x)\cdot x^3 - \int \frac{1}{\cancel{x}} x^{\cancel{3}\,2}\,dx\right) = \frac{1}{3}\left(\ln(x)\cdot x^3 - \int x^2\,dx\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}x^3\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right) + C}}$$

Aufgabe 16:

$$\int x \cdot \sin(x)\,dx$$

Lösung:

$$\int x \cdot \sin(x)\,dx$$

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

$$u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \sin(x) \Rightarrow v(x) = -\cos(x)$$

$$\int x \cdot \sin(x)\,dx = x \cdot -\cos(x) - \int 1 \cdot -\cos(x)\,dx = -\cos(x)\,x + \int \cos(x)\,dx = \underline{\underline{-\cos(x)\,x + \sin(x) + C}}$$

Aufgabe 17:

$$\int x \cdot \left(x^2 + 3\right)^2 dx$$

(Auf drei verschiedene Arten: Substitution, partielle Integration und Integrand Vereinfachung)

Lösung:

$\boxed{Partielle\ Integration:}$

$$\int u \cdot dv \cdot dx = u \cdot v - \int du \cdot v \cdot dx$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \left(x^2+3\right)^2 dx = \left(x^4+6x^2+9\right) \cdot dx \Rightarrow v = \frac{1}{5}x^5 + 2x^3 + 9x$$

$$\int x \cdot \left(x^2+3\right)^2 dx = x \cdot \left(\frac{1}{5}x^5 + 2x^3 + 9x\right) - \int \frac{1}{5}x^5 + 2x^3 + 9x\, dx$$

$$\int x \cdot \left(x^2+3\right)^2 dx = \frac{1}{5}x^6 + 2x^4 + 9x^2 - \frac{1}{5}\int x^5 dx - 2\int x^3 dx - 9\int x\, dx$$

$$\int x \cdot \left(x^2+3\right)^2 dx = \frac{1}{5}x^6 + 2x^4 + 9x^2 - \frac{1}{30}x^6 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^2 + C$$

$$\int x \cdot \left(x^2+3\right)^2 dx = \frac{1}{5}x^6 + 2x^4 + 9x^2 - \frac{1}{30}x^6 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^2 + C$$

$$\underline{\underline{\int x \cdot \left(x^2+3\right)^2 dx = \frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{9}{2}x^2 + C}}$$

$\boxed{Integration\ durch\ Substitution:}$

$$\int x \cdot \left(x^2+3\right)^2 dx$$

$$Substitution: x^2 + 3 = z \Rightarrow dz = 2x \cdot dx \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2x}dz$$

$$\int \cancel{x} \cdot z^2 \cdot \frac{1}{2\cancel{x}}dz = \frac{1}{2}\int z^2 dz = \frac{1}{6}z^3$$

$$Rücksubstitution: z = x^2 + 3$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{6}\left(x^2+3\right)^3 + C}}$$

$\boxed{Integration\ durch\ Ausklammern:}$

$$\int x \cdot \left(x^2+3\right)^2 dx = \int x\left(x^4+6x^2+9\right)dx = \int x^5 + 6x^3 + 9x\, dx =$$

$$\int x^5 dx + 6\int x^3 dx + 9\int x \cdot dx = \underline{\underline{\frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{9}{2}x^2 + C}}$$

Aufgabe 18:

$$\int x \cdot \left(4 - x^2\right)^3 dx$$

(Auf drei verschiedene Arten: Substitution, partielle Integration und Integrand Vereinfachung)

Lösung:

Aufgabe 19:

Lösung:

Aufgabe 20:

Lösung: